الباب الثالث

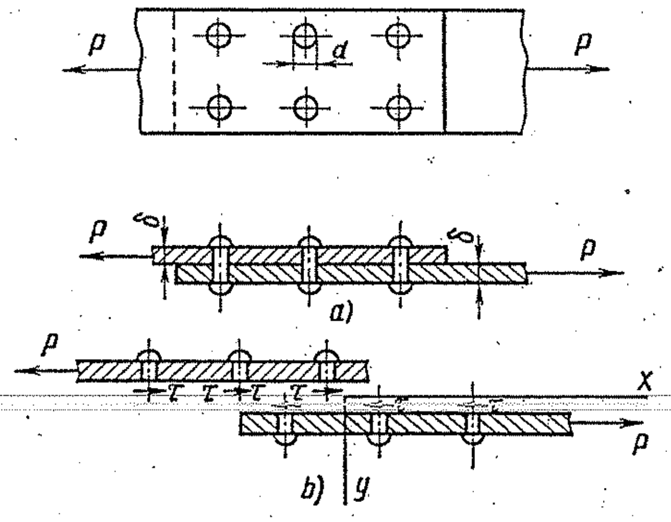
القص

٢٣ – تحديد الاجهادات

اذا آثرت فى المقطع العرضى للقضيب قوة عرضية فقط ، وكانت القوى الداخلية الاخرى تساوى صفرا ، فان حالة اجهاد القضيب هذه تسمى بالقص. فى هذه الحالة ، تؤثر فى المقطع العرضى الاجهادات المماسية وحدها التى تعتبر بمثابة القوة العرضية.

وفى اكثر المسائل العملية ، تظهر القوة العرضية فى نفس الوقت مع عزم الحناية والقوة الطولية ، بحيث تؤثر الاجهادات العمودية والمماسية عادة فى المقاطع.

ولكن ، اذا كانت الاجهادات المماسية اكبر بكثير من الاجهادات العمودية ، عندئذ يمكن اجراء الحساب بالنسبة للقص فقط.



الشكل ٣ – ١

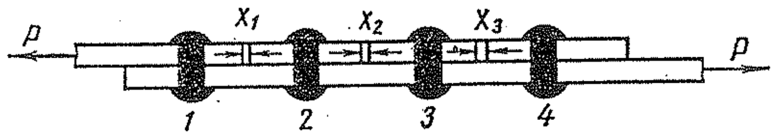
ويعتبر حساب ربط (وصل) البرشامات والمسامير واللحام كمثال نموذجي على هذا الحساب المبسط الذى اظهر التطبيق بانه مضبوط لدرجة كافية.

ويظهر الشكل ٣ ــ ١، a وصل لوحين بواسطة البرشام (وصلة تراكب). اما الرأس الثانى (القافل) للبرشامة، فيتكون نتيجة لعملية البرشمة.

وفى الشكل ٣ ــ ١، b تظهر صورة الانهيار الممكن للربط البرشمى. وينهار الربط نتيجة لقص البرشامات فى تلامس الالواح.

واذا كان انهيار كل برشامة يحدث فى مستوى قطع واحد، فان الربط البرشمى يسمى مفرد القص (الشكل ٣ ــ ١)، واذا كان يحدث بمستويين، فيسمى بالقص المزدوج (الشكل ٣ ــ ٦) ... الخ.

وتؤثر الاجهادات المماسية على مستوى قص البرشامات ولتحديد مقدار هذه الاجهادات المماسية يجب قبل كل شيء معرفة كيفية توزيع القوة P بين البرشامات بصورة منفردة. ولهذا فيجب اعتبار الربط البرشمى (الربط بالبرشام) كمجموعة غير محددة استاتيكيا.



الشكل ٣ ــ ٢

ويمكن اعتبار الشروط الواجب توافرها بين البرشامات فى لوح واحد من الالواح، مجهولة (الشكل ٣ ــ ٢). (توجد متنوعات اخرى للمجموعة الاساسية). وبمساواة الازاحات فى اماكن مقطع الالواح للصفر، فاننا نحصل على معادلات التشوهات الضرورية لتحديد القوى المجهولة.

وبتحديد القوى فى الالواح، فاننا نحصل على قوى القص فى البرشامات وهى عبارة عن الفرق بين القوى المجاورة للبرشام، فقوى القص فى البرشامة الثالثة مثلا (الشكل ٣ ــ ٢) ستساوى $Q_3 = X_3 - X_2$ وهكذا فى البقية.

ان نتائج حل هذه المسألة لوصلة تراكب، عندما تكون مساحة المقطع العرضى للالواح المبرشمة ذات المساحة الواحدة، مبينة فى الجدول ٣ ــ ١.

وكما يوضح الجدول، فانه بازدياد عدد البرشامات فى الصف، يزداد عدم الانتظام فى عمل البرشامات.

عندما نأخذ ٦ برشمات فان قوى القص فيها التى تقع فى النهايتين (البرشامة الاولى والسادسة) اكثر بحوالى ٢٫٥ مرة من قوى القص فى البرشامات الوسطى (البرشامة الثالثة والرابعة).

الجدول ٣ – ١

عدد البرشام	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_m
	اعتبارها كسر من القوة P						
٣	٠٫٣٥٣	٠٫٢٩٤	٠٫٣٥٣	–	–	–	٠٫٣٣٣
٤	٠٫٢٩	٠٫٢١	٠٫٢١	٠٫٢٩	–	–	٠٫٢٥
٥	٠٫٢٦	٠٫١٧	٠٫١٤	٠٫١٧	٠٫٢٦	–	٠٫٢٠
٦	٠٫٢٤	٠٫١٥	٠٫١١	٠٫١١	٠٫١٥	٠٫٢٤	٠٫١٦٦

وفي تلك الحالات التى تربط فيها اجزاء تختلف مساحة مقاطعها العرضية فان عدم الانتظام فى عمل البرشامات يزداد. وفى هذه الحالة، فان البرشامات التى تتميّز باكبر انفعال زائد توجد على اللوح الذي تكون مساحة مقطعه العرضي اقل.

ولكن التجارب اظهرت، انه عند تأثير الحمل الاستاتيكى، تتحطم البرشامات فى وقت واحد. وهذا يفسر، بانه قبل لحظة الانهيار يحدث تساو للقوى نتيجة للدونة المادة وكذلك نتيجة للفراغات (الخلوصات) الموجودة بين البرشامات والالواح.

وعند تأثير الاحمال الطارقة (التصادمية) والاهتزازية، من الضرورى ان نأخذ عدم انتظام عمل البرشامات فى الاعتبار.

وهكذا، فعند تأثير الحمل الاستاتيكى يمكن اعتبار ان قوة القص فى كل برشامة تساوى:

$$Q = \frac{P}{n} \qquad (٣ - ١)$$

حيث P ـ القوة التى تؤثر على المفصل.

n ـ عدد البرشامات.

وفى حالة القص المزدوج للربط البرشمى (انظر الشكل ٣ ـ ٦)، يجب ان نفهم ان n هى عدد البرشامات الواقعة على جهة واحدة من محل تثبيت الالواح المربوطة.

وفيما بعد، فان الاجهادات المماسية فى مستوى القص تعتبر موزعة بصورة منتظمة، مع العلم بانه في الواقع، وكما اظهرت الابحاث التجريبية لا يعتبر توزيعها منتظما. ولكن يصعب الحل النظرى الدقيق لهذه المسألة، طالما كانت هناك فراغات (خلوصات) بين البرشامات والالواح، وقوى الاحتكاك بين الالواح، الخ. وعدا ذلك، فعند صنع البرشامات تستهلك انواع الفولاذ الاكثر لدونة، ولذا فان عدم الانتظام فى توزيع الاجهادات المماسية يزول نتيجة لظهور التشوهات اللدنة قبل لحظة الانهيار.

وباعتبار توزيع الاجهادات المماسية فى مقطع البرشامة منتظما فمن السهل الحصول على مقدارها.

نضع معادلات التوازن لقسم المفصل المقطوع، وليكن مثلا الاعلى (الشكل ٣ ـ ١، b) فنحصل على:

$$\Sigma X = 0, \quad -P + n\tau F = 0$$

ومن هنا:

$$\tau = \frac{P}{nF} \qquad (٣ - ٢)$$

حيث $F = \frac{\pi d^2}{4}$، مساحة المقطع العرضى للبرشامة ذات القطر d.

وباستعمال الصيغة (٣ ـ ١) نحصل من (٣ ـ ٢) على:

$$\tau = \frac{Q}{F}. \qquad (٣ - ٣)$$

ان شروط مقاومة القص فى البرشامات ، تكون بالشكل الآتى :

$$\tau = \frac{P}{Fn} = \frac{Q}{F} \leqslant [\tau_{sh}] \cdot \qquad (٣ - ٤)$$

حيث τ_{sh}. — اجهاد القص المسموح به.

ومن الصيغة (٣ — ٤) يمكن تحديد العدد اللازم من البرشامات ذات القص المفرد بسهولة:

$$n \geqslant \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau_{sh}]} \cdot \qquad (٣ - ٥)$$

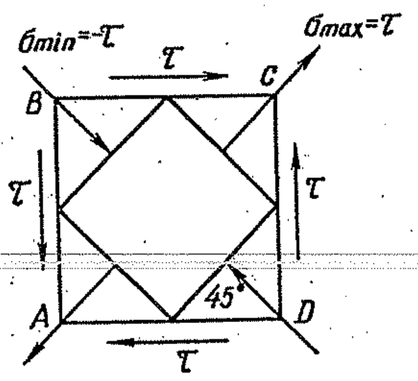
وفى الوصل التى تكون برشاماتها مزدوجة او مضاعفة القص، نضع المجموع الكلى لمستويات القص المبرشمة الواقعة فى جهة واحدة من الوصلة محل n فى الصيغة (٣ - ٤).

ويثبت عادة مقدار اجهادات القص عن طريق التجارب لكى يتبين تأثير عدم انتظام توزيع الاجهادات على متانة الربط، وتأثير قوى الاحتكاك، الفراغات (الخلوصات) وما شاكل ذلك. وعند القيام بحساب البرشامات تستعمل $[\sigma_t]$ (0.6÷0.8) = $[\tau_{sh.}]$، حيث $[\sigma_t]$ هو الاجهاد المسموح به عند الشد

لقد اثبتت التجارب ان المواد الليفية (الخشب مثلا)، والتى تعتبر غير متجانسة جدا ومتباينة الخواص، فانها، تظهر مقاومة قليلة للقص الذى يحدث باتجاه الالياف. عند قص الصنوبر مثلا باتجاه الالياف تستعمل $[\tau_{sh}] = 0.1 [\sigma_t]$

ولا تؤثر الاجهادات المماسية (الشكل ٣ — ٣) على مساحتى القص BC و AD فقط بل وعلى المساحتين CD و AB العموديتين على المساحتين السابقتين هذا ما يستخلص من قانون ترافق الاجهادات المماسية.

وفى المقاطع المائلة، تؤثر الاجهادات العمودية والمماسية. والاجهادات العمودية العظمى تكون فى المساحات الرئيسية. ويمكن تحديد مقدارها واتجاهاتها بواسطة الصيغتين (٢ — ٣٥ و ٢ — ٣٦).



الشكل ٣ — ٣

وبما ان $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$، فاننا فى حالتنا هذه نحصل من الصيغة (٢ ـ ٣٥) على: $\tan 2\psi_0 = \infty$.

اذن فالمساحات الرئيسية تنحرف عن اتجاه مساحات القص بزاوية $\psi_0 = 45°$ (انظر الشكل ٣ ـ ٣).

ان الاجهادات الرئيسية المحددة بواسطة الصيغة (٢ ـ ٣٦) تساوى:

$$\sigma_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \tau \qquad (٣ - ٦)$$

اى انها تساوى الاجهادات المماسية التى تؤثر على مستوى القص، من حيث المقدار. وهنا يكون اجهاد رئيسى واحد شادا، والثانى ضاغطا (انظر الشكل ٣ ـ ٣). وبما ان كلا من الاجهادين الرئيسيين لا يساوى صفرا، فان القص يعتبر حالة خاصة من حالات الاجهاد الثنائى المحور وهذا ما ذكر سابقا (انظر الشكل ٢ ـ ٣٦، d).

وعدا حساب القص فعند تصميم الوصل المبرشمة، يحسب ايضا التهصر. ويتأكد من اجهادات التهصر على مساحات التلامس بين الالواح المربوطة والبرشامات. ويبين الشكل ٣ ـ ١، a، مساقط مساحات التهصر على مستوى الرسم بخطوط عريضة. وتؤخذ مساحة تهصر برشامة واحدة مساوية * $F_{cr} = d\delta$. وتعتبر اجهادات التهصر منتظمة التوزيع على مساحة التهصر، وان شروط المتانة عند التهصر يعبر عنها بالصيغة:

$$\sigma_{cr} = \frac{P}{n' F_{cr}} \leqslant [\sigma_{cr}] \qquad (٣ - ٧)$$

حيث $[\sigma_{cr}]$ ـ الاجهاد المسموح به عند التهصر.

n' ـ عدد البرشامات.

---

* فى حالة وصلة تراكب لوحين مختلفى السمك فعند حساب F_{cr} يجب اخذ $\delta_{\min}$. وفى حالة وصلة تناكب لها لوحان للتغطية (انظر الشكل ٣ ـ ٦)، يجب فهم δ بانها سمك الالواح المربوطة، اذا كان لا يزيد عن $2\delta_{pl}$، حيث δ_{pl} سمك لوح تغطية واحد وبالعكس عند $2\delta_{pl} < \delta$ يجب اخذ $F_{cr} = 2d\delta_{pl}$.

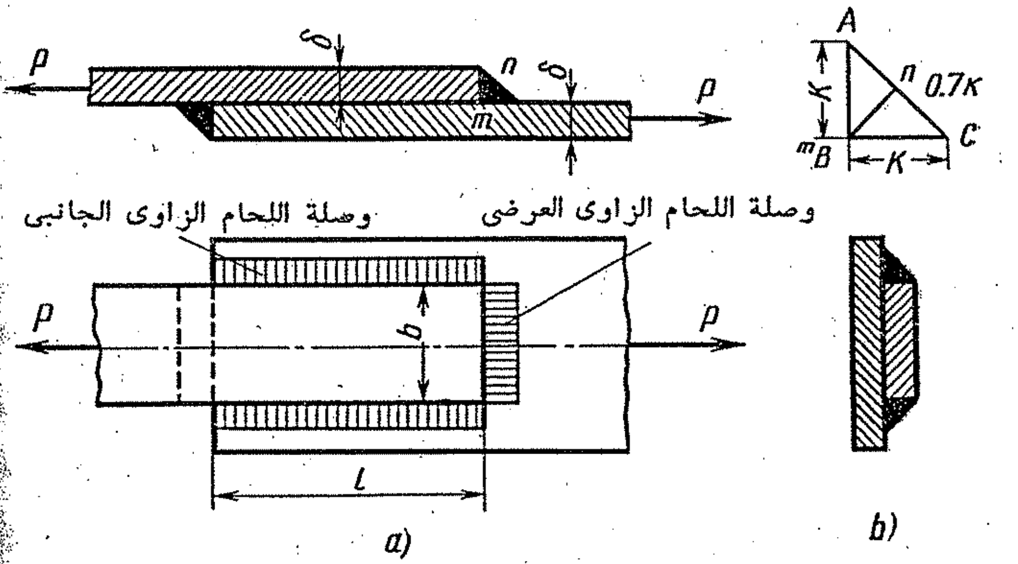
وفى حالة الثقوب المستحدثة بواسطة الثاقب او بواسطة الضغط، والموسعة بعد ذلك، تؤخذ $[\sigma_{cr}]=2[\sigma]$.

ومن الصيغة (٣ — ٧)، يمكن تحديد عدد البرشامات اللازمة، حسب شروط المتانة عند التهصر:

$$n' \geqslant \frac{P}{d\delta(\sigma_{cr})}. \qquad (٣ — ٨)$$

ومن المقدارين n و n' نختار المقدار الاكبر.

وباستعمال الصيغة $\tau=\frac{Q}{F}$، يمكن تصميم الوصل الملحومة التى اخذت فى السنوات الاخيرة تحل محل الوصل المبرشمة. الشكل ٣ — ٤، a يبين وصلة تراكب لوحين بواسطة اللحام الزاوى العرضى والجانبى. وعند تصميم اللحام



الشكل ٣ — ٤

الزاوى العرضى والجانبى، نعتبر ان المقطع الخطر فى اللحام ينطبق مع المستوى الذى يمر بالمنصف mn للزاوية القائمة ABC (الشكل ٣ — ٤، b). وهكذا فان مساحة المقطع الخطر فى كل لحام زاوى عرضى، تساوى $b0.7k$، ولكل لحام زاوى جانبى تساوى $l0.7k$، حيث k — قاعدة اللحام، وفى الحالة الموضحة فى الشكل ٣ — ٤، فان قاعدة اللحام تساوى سمك اللوحة العليا

وتعتبر اجهادات القص موزعة بصورة منتظمة على مساحة المقطع الخطر. وباخذ الافتراضات التى ذكرناها فى الاعتبار، فان الحمل المسموح به فى اللحام الزاوى العرضى يحدد بالصيغة:

$$[P_{tr}] = b\,0.7k\,[\tau_w] \qquad (٩ - ٣)$$

حيث τ_w — اجهاد القص المسموح به لذلك اللحام.

الحمل المسموح به فى اللحام الزاوى الجانبى:

$$[P_s] = l\ 0.7k\,[\tau_w]\,. \qquad (١٠ - ٣)$$

ومن اجل ان يكون اللحام قويا يجب الا تكون المقاومة الكلية المسموح بها لذلك اللحام، اقل من القوة المؤثرة على الوصلة (المفصل).

$$2\,[P_s] + 2\,[P_{tr}] \geqslant P. \qquad (١١ - ٣)$$

وباستعمال هذه المعادلات، واعطاء ابعاد l و K، يمكن تحديد طول اللحام الضرورى.

ان انواع الوصل المبرشمة والملحومة متنوعة جدا. وتدرس هذه بصورة مفصلة فى موضوع «قطع غيار الآلات» ومواضيع خاصة اخرى.

٢٤ — التشوهات عند القص

ان الجزء $ABCD$ المستطيل قبل التشوه (الشكل ٣ — ٥) يأخذ بعد تشوه القص الشكل $AB'C'D$ (نعتبر الضلع AD مثبتا).

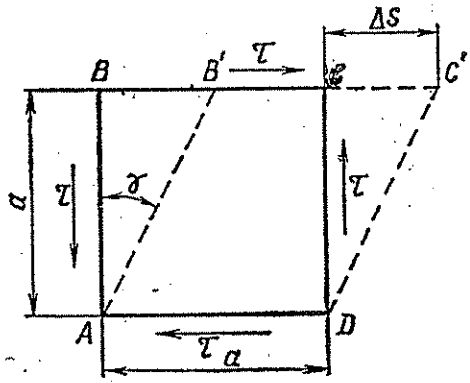
ان مقدار $CC' = \Delta S$ ويسمى القص التام.

ونسبة $\tan\gamma = \frac{\Delta S}{a}$ تسمى القص النسبى. ونظرا لقلة التشوهات، يمكن اعتبار $\tan\gamma \approx \gamma$. وتسمى هذه الزاوية بزاوية القص.

وقد اظهرت التجارب، بان لكثير من المواد، حتى حدود معينة من التحميل علاقة خطية بين الاجهادات والتشوهات عند القص

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \qquad (١٢ - ٣)$$

والتى تعبر عن قانون هوك لحالة القص. ان المعامل الثابت G يسمى بمعامل القص (معامل المرونة من الدرجة الثانية) وهو يبين قابلية المادة على مقاومة تشوهات القص . وبمعرفة γ يمكن الحصول على القص التام :



الشكل ٣ — ٥

$$\Delta S = \gamma a = \frac{\tau a}{G} = \frac{Qa}{GF} \qquad (٣ — ١٣)$$

حيث Q — القوة المؤثرة على الوجه BC

F — مساحة هذا الوجه (هنا وكما سبق، نعتبر ان اجهادات القص موزعة بانتظام على مساحات تأثيرها).

ان العلاقة الخطية بين τ و γ تبقى سارية المفعول ما دامت اجهادات القص لا تتجاوز الحد التناسبى عند القص.

ومن الصيغة (٢ — ٤٢) يتضح، انه عند القص البحت، يكون التشوه الحجمى ε_V مساويا للصفر وذلك لان

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_3 = -\tau, \quad \sigma_2 = 0.$$

٢٥ — طاقة الوضع عند القص. العلاقة بين ثوابت المرونة الثلاثة E، G، μ

لنحسب طاقة الوضع عند القص، وللسهولة نفترض ان الوجه AD من اوجه المادة ثابت (انظر الشكل ٣ — ٥) وعند ذلك فان طاقة الوضع ستساوى شغل القوة Q المؤثرة على الوجه BC :

$$\Pi = \frac{Q\Delta S}{2} = \frac{Q^2 a}{2GF}. \qquad (٣ — ١٤)$$

طاقة الوضع النوعية ستساوى:

$$u = \frac{\Pi}{V}\frac{Q^2 a}{2GF^2 a} = \frac{\tau^2}{2G} \qquad (٣ — ١٥)$$

(وذلك لان $\tau = \frac{Q}{F}$ و $V = Fa$).

ومن ناحية اخرى، يمكن حساب طاقة الوضع باعتبارها شغل الاجهادات العمودية الرئيسية (شكل ٣ — ٣). ومن الصيغة (٢ — ٥٣) لحالة الاجهاد السطحي، الذى يعتبر قصا بحتا، نفترض ان $\sigma_2=0$ حيث نحصل على

$$u=\frac{1}{2E}(\sigma_1^2+\sigma_3^2-2\mu\sigma_1\sigma_3) \qquad (٣ - ١٦)$$

ولكن الاجهادات الرئيسية متساوية $\sigma_1=\tau$ و $\sigma_3=-\tau$

اذن:

$$u=\frac{\tau^2(1+\mu)}{E}. \qquad (٣ - ١٧)$$

وبما ان مقدار الطاقة لا يجب ان يتعلق باتجاه اضلاع المادة، فبمساواة الاطراف اليمنى للمعادلتين (٣ — ١٥) و (٣ — ١٧)، نحصل على

$$\frac{\tau^2}{2G}=\frac{\tau^2(1+\mu)}{E}.$$

ومن هنا نجد العلاقة بين معامل القص G ومعامل المرونة من الدرجة الاولى E،

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (٣ - ١٨)$$

للفولاذ:

$$G=\frac{2\times10^6}{2(1+0.3)}\approx 8\times10^5 \text{ kg/cm}^2$$

مثال ٣ — ١. يراد تصميم وصلة مبرشمة للوحين مقطعهما واحد يبلغ سمكه $\delta=16mm$، ومغطيان بلوحى تغطية (الشكل ٣ — ٦)، اذا كانت $P=60t$ والاجهادات المسموح بها $[\sigma_c]=[\sigma_t]=1600kg/cm^2$، $[\tau_{sh}]=1000kg/cm^2$، $[\sigma_{cr}]=3200kg/cm^2$.

الحل. فى هذه الحالة يكون البرشام مزدوج القص، ولذلك فلكى تنهار الوصلة يجب ان تقص كل برشامة بمستويين. نعتبر قطر البرشامة $d=20mm$. ونحدد عدد مستويات القص الضرورية بواسطة الصيغة (٣ — ٥):

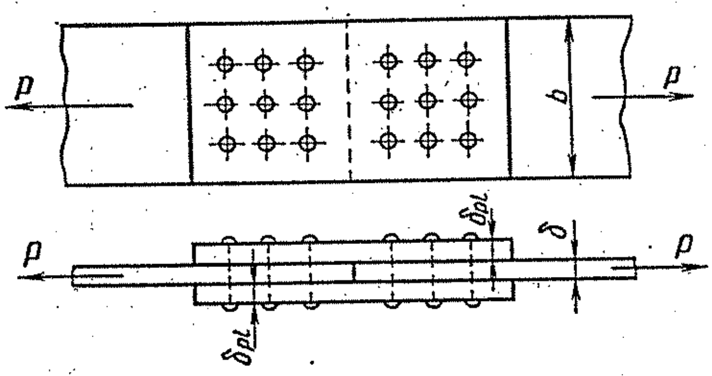
$$n=\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}[\tau_{sh}]}=\frac{60000\times4}{3.14\times2^2\times1000}=17.4$$

اذن، فمن الضروري اخذ ٩ برشامات وعدد البرشامات الضرورية عند التهصر، حسب الصيغة (٣ — ٨) يساوي:

$$n' = \frac{P}{\delta d\,[\sigma_{crush}]} = \frac{60000}{1.6 \times 2 \times 3200} = 5.85 \approx 6 \text{ rivets}$$

وعند تصميم الوصل المبرشمة فان حساب القص هو الحساب الذي يعتمد عليه نهائيا. نأخذ ٩ برشامات على كل من جانبي الوصلة في ثلاثة خطوط وفي كل خط ثلاث برشامات (انظر الشكل ٣ — ٦). ونختار مقطع اللوح F اعتمادا على حساب الشد:

$$F = \frac{P}{[\sigma_t]} = \frac{60\,000}{1\,600} = 37.5 \text{ cm}^2$$



الشكل ٣ — ٦

ومن هنا، عندما يكون السمك $\delta=1.6cm$، نجد عرض اللوح:

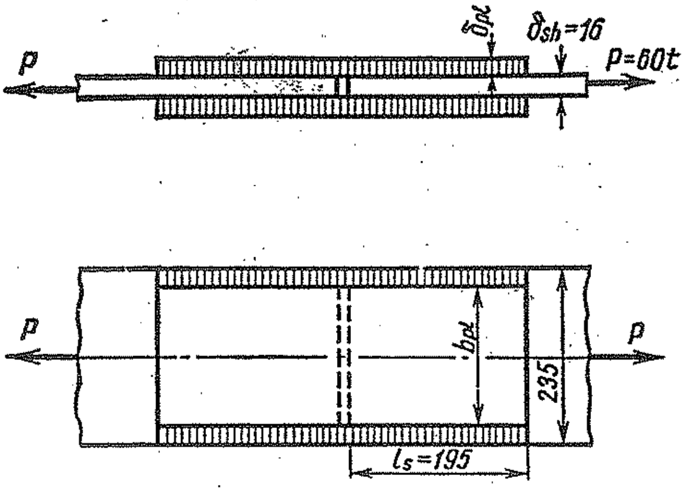
$$b_1 = \frac{F}{\delta} = \frac{37.5}{1.6} = 23.5 \text{ cm}.$$

والى هذا العرض يجب اضافة عرض الثقوب $3d=6cm$ وعند ذاك فان العرض الكلي للوح $b=23.5+6=29.5cm$. ان هذا العرض يكفي لاستيعاب ثلاث برشامات (ان المسافة بين مراكز البرشامات تؤخذ مساوية لـ $3d$). ان سمك كل لوح تغطية δ_{pl}، يجب ان يكون اكثر من نصف سمك اللوح، ولنعتبر $\delta_{pl}=0.8cm$.

مثال ٣ — ٢. يراد تصميم وصلة ملحومة حسب معطيات المثال السابق (الشكل ٣ — ٧). مع العلم بان اجهاد القص المسموح به بذلك اللحام يساوى:

$$[\tau_w] = 1\,100 \text{ kg/cm}^2$$

الحل. لكى نترك محلا لوضع اللحام الزاوى نجعل عرض لوح التغطية، اقل من عرض اللوح b_{sh} الى حدما اى $b_{pl} = b_{sh} - 2\delta = 235 - 32 = 203\text{mm}$:



الشكل ٣ — ٧

وحسب شروط المتانة المتساوية، فان مساحة المقطع العرضى للوحى التغطية، يجب ان لا تكون اقل من مساحة المقطع العرضى للوح اى: $2b_{pl.}\,\delta_{pl.} \geqslant F_{sh.}$.
ومن هنا فان سمك لوح التغطية:

$$\delta_{pl} \geqslant \frac{1.6 \times 23.5}{2 \times 20.3} = 0.92 \text{ cm}.$$

لنأخذ $\delta_{pl.} = 10mm$، ونحدد الطول العملى الضرورى للحام الزاوى الجانبى l_s من الشروط (راجع الصيغة ٣ — ١٠) $1100 \times 4 \times 0.7 l_s \geqslant 60000$ ، ومن هنا $l_s = 19.5cm$.

الباب الرابع

الخصائص الهندسية للمقاطع

٢٦ – العزم الاستاتيكي للمقطع

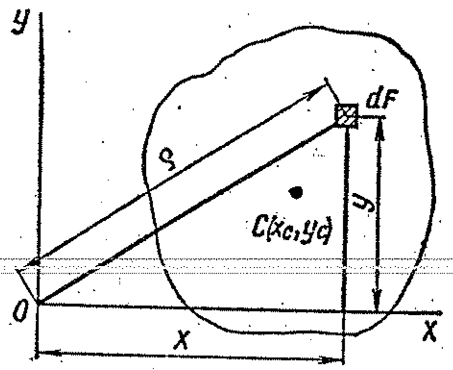
عند الدراسة اللاحقة لمسائل المتانة والصلابة والاستقرار، يتوجب علينا معرفة بعض الخصائص الهندسية للمقطع: العزوم الاستاتيكية، عزوم القصور الذاتي وعزوم المقاومة.

ان العزم الاستاتيكي S_x لمقطع او لشكل بالنسبة الى محور ما (الشكل ٤ – ١)، الخاصية الهندسية او الكمية التي تحدد بواسطة التكامل الآتي:

$$S_x = \int_F y dF \qquad (٤ – ١)$$

حيث y – المسافة بين المساحة الاولية dF وبين المحور x.

ان بعد العزم الاستاتيكي – وحدة الطول مرفوعة الى الدرجة الثالثة وتكون عادة سم٣ (cm^3). ويمكن ان يكون العزم موجبا او سالبا، واحيانا مساويا للصفر. واذا تطابقت المساحة مع القوة فان التكامل (٤ – ١) يمكن اعتباره كمجموع لعزوم القوى dF بالنسبة الى المحور x. وطبقا لما نعرفه من الميكانيكا النظرية، فمن الممكن كتابة معادلة عزم المحصلة كما يلي:



الشكل ٤ – ١

$$S_x = \int_F y dF = F y_c \qquad (٤ – ٢)$$

حيث F — المساحة الكلية للشكل (المحصلة).

y_c — المسافة بين مركز ثقل الشكل والمحور x.

ونستخلص من الصيغة (٤ — ٢) صيغة لتحديد الاحداثى الرأسى لمركز الثقل:

$$y_c = \frac{S_x}{F} \qquad (٤ — ٣)$$

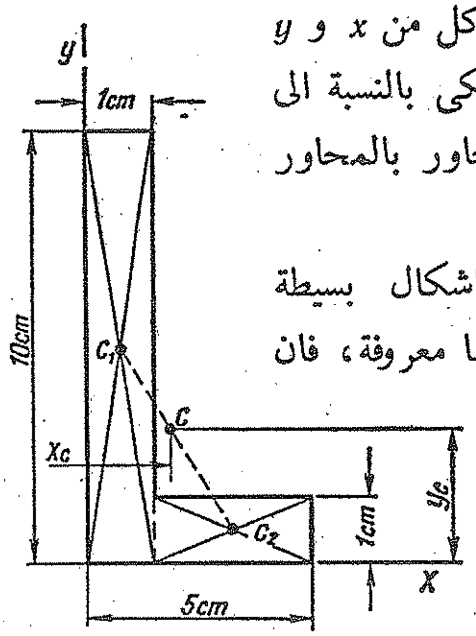
وكذلك، فان العزم الاستاتيكى بالنسبة الى المحور y يساوى:

$$S_y = \int_F x dF = F x_C \qquad (٤ — ٤)$$

ومن هنا:

$$x_c = \frac{S_y}{F}. \qquad (٤ — ٥)$$

ومن هذه الصيغ نستنتج، انه اذا كان كل من x و y يمر بمركز ثقل الشكل، فان العزم الاستاتيكى بالنسبة الى هذه المحاور يساوى صفرا. وتسمى هذه المحاور بالمحاور المركزية.



الشكل ٤ — ٢

واذا امكن تصور الشكل، كعدة اشكال بسيطة (مربعات، مثلثات، الخ) تكون مراكز ثقلها معروفة، فان العزم الاستاتيكى للشكل باجمعه، يمكن الحصول عليه بجمع العزوم الاستاتيكية لهذه الاشكال البسيطة. وهذا يستنتج مباشرة من خصائص التكامل المحدود.

واذا كان للشكل محور تماثل، فان محور التماثل يمر دائما بمركز ثقل الشكل، ولذا فان العزم الاستاتيكى للشكل بالنسبة الى محور التماثل يساوى صفراً.

<u>مثال ٤ — ١</u>. يراد تحديد موضع مركز ثقل المقطع (الشكل ٤ — ٢).

<u>الحل</u>. نقسم المقطع الى مستطيلين، نقوم بمد محاور اضافية x و y.

وبواسطة الصيغ (٤ — ٣) و (٤ — ٥) نحصل على :

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{F_1x_1 + F_2x_2}{F_1+F_2} = \frac{10 \times 1 \times 0.5 + 4 \times 1 \times 3}{10 + 4} = 1.2 \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{F_1y_1 + F_2y_2}{F_1 + F_2} = \frac{10\times1\times5 + 4\times1\times0.5}{14} = 3.7 \text{ cm.}$$

وبواسطة هذين الاحداثيين نحصل على نقطة C — مركز ثقل المقطع

٢٧ — عزم القصور الذاتي للمقطع (المطلق)

ان عزم القصور الذاتي المحوري او الاستوائي لمساحة المقطع العرضي هو الخاصية الهندسية للمقطع التي تساوي عدديا التكامل:

$$J_x = \int_F y^2 dF \qquad (٤ — ٦)$$

وبالمثل، فان عزم القصور الذاتي حول المحور y يساوي:

$$J_y = \int_F x^2 dF$$

حيث y — المسافة بين المساحة الاولية dF وبين المحور x (انظر الشكل ٤ — ١).

x — المسافة بين المساحة الاولية dF وبين المحور y.

ان عزم القصور الذاتي القطبي لمساحة المقطع هو الخاصية الهندسية التي تحدد بالتكامل:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF \qquad (٤ — ٧)$$

حيث ρ — المسافة بين المساحة dF وبين القطب (انظر الشكل ٤ — ١)، الذي يحسب عزم القصور الذاتي بالنسبة له.

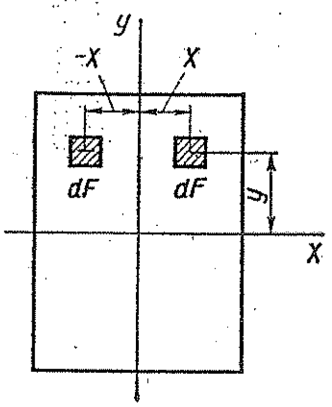
ان عزوم القصور الذاتي المحورية والقطبية هي مقادير موجبة دائما. وفي الحقيقة، فان عزم القصور الذاتي المناظر بغض النظر عن اشارة احداثيات المساحة الاختيارية يكون موجبا حيث يدخل مربع هذا الاحداثي ضمنه.

ان عزم القصور الذاتى الطارد المركزى لمساحة المقطع هو الخاصية الهندسية التى تحدد بالتكامل:

$$J_{xy} = \int_F xydF \qquad (\text{٤} - \text{٨})$$

حيث x و y — المسافتان بين المساحة dF وبين المحورين x و y.

ووحدة قياس كافة عزوم القصور الذاتى هى وحدة الطول مرفوعة الى الدرجة الرابعة (عادة سم^4، cm^4).



الشكل ٤ — ٣

ان عزم القصور الذاتى الطارد المركزى قد يكون موجبا او سالبا وفى حالات خاصة قد يساوى صفرا.

واذا كان المحوران المتعامدان على بعضهما x، y او احدهما بمثابة محور تماثل للشكل، فان عزم القصور الذاتى الطارد المركزى بالنسبة الى مثل هذه المحاور يساوى صفرا. وبالحقيقة، يمكن اختيار جزءين من مساحة الشكل المتماثل دائما (الشكل ٤ — ٣) بحيث يكون لهما احداثى رأسى واحد y واحداثيان افقيان متساويان فى المقدار ومتضادان فى الاشارة. وبجمع حاصل الضرب $xydF$ لمثل هذه الاجزاء، اى بحساب التكامل (٤ — ٨)، نحصل فى النتيجة على صفر.

ويمكن البرهنة بسهولة على ان عزم القصور الذاتى القطبى حول اية نقطة كانت، يساوى مجموع عزوم القصور الذاتى المحورية، حول محورين متعامدين على بعضهما يمران بهذه النقطة.

وفى الواقع، يتضح من الشكل ٤ — ١ ان $\rho^2 = x^2 + y^2$ وبتعويض هذه القيمة فى المعادلة (٤ — ٧)، فاننا نحصل على:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_F (x^2 + y^2)\, dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF.$$

اذن:

$$J_p = J_x + J_y. \qquad (\text{٤} - \text{٩})$$